УДК 514.74, 512.815

Формальная теорема Фробениуса и метод сдвига аргумента

А.В. Болсинов, К.М. Зуев

1. Введение

В данной работе мы доказываем формальную теорему Фробениуса, которая является формальным аналогом классической теоремы об интегрируемости гладких распределений. Далее, мы применяем ее для построения коммутативного набора полиномов в пуассоновой алгебре $P(\mathfrak{g})$, ассоциированной с конечномерной алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ над произвольным полем $\mathbb{K}$ нулевой характеристики и доказываем критерий полноты этого набора.

Рассмотрение алгебр Ли над произвольным полем в этом контексте мотивировано доказательством гипотезы Мищенко-Фоменко [6] о том, что в пуассоновой алгебре любой конечномерной вещественной или комплексной алгебры Ли существует полный коммутативный набор полиномов. Эта гипотеза была доказана А.С. Мищенко и А.Т. Фоменко для полупростых алгебр Ли при помощи разработанного ими метода сдвига аргумента [5]. В общем случае ее доказал С.Т. Садэтов [7], предложив алгебраическую конструкцию, сводящую задачу к алгебре Ли меньшей размерности над новым полем, являющимся расширением исходного, см. также [3]. Таким образом, даже стартуя с алгебры Ли над "привычным" полем вещественных или комплексных чисел, в процессе построения полного коммутативного набора в $P(\mathfrak{g})$ приходится рассматривать алгебры Ли над новыми полями.

Итак, пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над произвольным полем $\mathbb{K}$. В этом случае, в отличие от вещественных, комплексных или алгебраических алгебр Ли, отсутствует группа (Ли или алгебраическая) G и, следовательно, мы не можем использовать теорию инвариантов, которая часто применяется для изучения различных вопросов, связанных с алгебрами Ли. Например, в методе сдвига аргумента "базовыми" функциями для построения полного коммутативного набора в $P(\mathfrak{g})$ являются инварианты коприсоединенного представления, т.е. аналитические функции постоянные на орбитах представления $\mathrm{Ad}^* : G \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}^*)$. Хотя в случае произвольного поля коприсоединенное представление группы не определено, оказывается, можно естественным способом определить объекты, играющие роль его инвариантов. Если $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, то хорошо известно, что аналитическая функция $f \in \mathcal{A}(\mathfrak{g}^*)$ является инвариантом тогда и только тогда, когда $\mathrm{ad}^*_{df(x)}x = 0$. В этом определении участвуют только структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{g}$, поэтому оно имеет смысл для любого поля $\mathbb{K}$. В случае произвольного поля надо лишь договориться, что понимать под f. Ограничиться только рациональными функциями $\mathbb{K}(\mathfrak{g}^*)$, как это позволяет сделать теорема Розенлихта в случае алгебраической алгебры Ли, нельзя, так как мы не предполагаем алгебраичности $\mathfrak{g}$, а в таком случае рациональных инвариантов для построения полного набора может не хватить. С другой стороны, хорошо известно, что в вещественном или комплексном случае инварианты могут быть глобально не определены, и тогда мы вынуждены рассматривать локальные инварианты, которые по своей сути являются сходящимися рядами. Эти соображения приводят к следующей естественной идее: под инвариантом (точнее формальным инвариантом) коприсоединенного представления мы будем понимать формальный ряд из кольца $\mathbb{K}[[\mathfrak{g}^*]]$, удовлетворяющий некоторому естественному условию (типа $\mathrm{ad}^*_{df(x)}x = 0$). Пользуясь формальной теоремой Фробениуса можно доказать, что в каждой регулярной точке $a \in \mathfrak{g}^*$ всегда существует "максимальный" набор формальных инвариантов. Легко показать, что набор однородных частей формальных инвариантов будет коммутативным набором полиномов в $P(\mathfrak{g})$. Такой метод построения коммутативного набора полиномов мы называем формальным методом сдвига аргумента. В заключении мы доказываем критерий полноты набора, построенного этим методом, аналогичный критерию из [1, 2].

Работа построена следующим образом. В разделе 2 мы доказываем формальную теорему Фробениуса, которая является полезным техническим результатом для дальнейшей части статьи и, кроме того, интересна сама по себе как формальный аналог классической теоремы Фробениуса. В разделе 3 мы вводим понятие "формального инварианта" для любого (не обязательно коприсоединенного) представления алгебры Ли и доказываем существование "максимального" набора таких инвариантов. В разделе 4 мы рассматриваем коприсоединенное представление алгебры Ли $\mathrm{ad}^* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}^*)$. Применяя результаты, полученные в предыдущих разделах, мы определяем набор полиномов $\mathcal{F}_a \subset P(\mathfrak{g})$, состоящий из однородных частей формальных инвариантов, и доказываем его коммутативность. Доказательство критерия полноты набора $\mathcal{F}_a$ (раздел 6) почти автоматически следует из леммы об иерархии, порождаемой парой кососимметрических билинейных форм (раздел 5).

На протяжении всей работы мы считаем, что поле $\mathbb{K}$ имеет характеристику нуль и все топологические понятия используются в смысле топологии Зарисского.

2. Формальная теорема Фробениуса

Классическая теорема Фробениуса является критерием интегрируемости распределений на многообразии и может быть сформулирована в терминах векторных полей следующим образом (см, например, [8]).

Теорема 1 (Теорема Фробениуса)**.** *Гладкое распределение $\mathcal{D}$ на многообразии M интегрируемо тогда и только тогда, когда множество векторных полей, касающихся распределения $\mathcal{D}$, замкнуто относительно коммутатора векторных полей.*

Для того, чтобы получить формальный аналог теоремы Фробениуса нужно лишь вместо гладких геометрических объектов рассмотреть их формальные аналоги. Опишем соответствующую конструкцию более подробно.

Пусть $\mathbb{K}^n$ — аффинное пространство над полем $\mathbb{K}$. Формальное векторное поле на $\mathbb{K}^n$ — это вектор, компонентами которого являются формальные степенные ряды, $v = (v^1(x), \dots, v^n(x)), \quad v^i \in \mathbb{K}[[x_1, \dots, x_n]]$. Формальный коммутатор формальных векторных полей определяется при помощи стандартной формулы для коммутатора.

Определение 1. Формальным распределением $\mathcal{D}$ на $\mathbb{K}^n$ называется линейная оболочка над $\mathbb{K}[[x_1, \dots, x_n]]$ набора формальных векторных полей:

$$\mathcal{D} = \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_k\}.$$

Ранг формального распределения — это ранг (вычисляемый над $\mathbb{K}[[x_1, \dots, x_n]]$) матрицы, составленной из компонент формальных векторных полей, порождающих распределение:

$$\operatorname{rank}\mathcal{D} = \operatorname{rank}\Xi(x), \quad \Xi(x) = \begin{pmatrix} v_1^1(x) & \dots & v_1^n(x) \\ \vdots & & \vdots \\ v_k^1(x) & \dots & v_k^n(x) \end{pmatrix}.$$

По определению, условие постоянства ранга распределения означает, что ранг формальной матрицы $\Xi(x)$ над кольцом формальных рядов равен рангу "числовой" матрицы $\Xi(0)$, полученной занулением всех переменных.

Определение 2. Формальным интегралом распределения $\mathcal{D} = \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_k\}$ называется формальный ряд $F \in \mathbb{K}[[x_1, \dots, x_n]]$, производные которого вдоль всех формальных векторных полей, определяющих распределение $\mathcal{D}$, равны нулю:

$$v_\alpha(F) := \sum v_\alpha^i \frac{\partial F}{\partial x^i} = 0, \quad \text{для всех } \alpha = 1, \dots, k. \tag{1}$$

Определение 3. Формальное распределение $\mathcal{D}$ на $\mathbb{K}^n$ постоянного ранга r называется формально интегрируемым, если существует $(n-r)$ формальных интегралов $\mathcal{D}$, дифференциалы которых линейно независимы в нуле.

Теорема 2 (Формальная теорема Фробениуса)**.** *Формальное распределение $\mathcal{D} = \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_k\}$ на $\mathbb{K}^n$ постоянного ранга формально интегрируемо тогда и только тогда, когда все коммутаторы $[v_i, v_j]$ линейно выражаются через $v_1, \dots, v_k$ с коэффициентами из $\mathbb{K}[[x_1, \dots, x_n]]$ (т.е. распределение $\mathcal{D}$ замкнуто относительно коммутатора).*

Доказательство. В формальном распределении $\mathcal{D}$ постоянного ранга r всегда можно выбрать базис, т.е. существуют формальные векторные поля $u_1, \dots, u_r$ такие, что любой элемент из $\mathcal{D}$ единственным образом представляется в виде линейной комбинации $u_1, \dots, u_r$ с коэффициентами из $\mathbb{K}[[x_1, \dots, x_n]]$. Поэтому утверждение теоремы достаточно доказать для случая, когда $k = r$ и формальные поля $v_1, \dots, v_k$ образуют базис распределения $\mathcal{D}$.

Без ограничения общности, предположим, что подпространство в $\mathbb{K}^n$, порожденное линейно независимыми векторами $v_1(0), \dots, v_k(0)$ совпадает с линейной оболочкой первых k векторов стандартного базиса в $\mathbb{K}^n$. Перейдем к более удобному базису распределения. Для этого рассмотрим $k \times k$ матрицу A, образованную первыми k строками и столбцами матрицы

$$\Xi = \begin{pmatrix} v_1^1 & \dots & v_1^k & v_1^{k+1} & \dots & v_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_k^1 & \dots & v_k^k & v_k^{k+1} & \dots & v_k^n \end{pmatrix}.$$

Так как $\det A(0) \neq 0$, то обратная матрица A^{-1} хорошо определена. Поэтому переход $\Xi \to \Xi' = A^{-1}\Xi$ эквивалентен замене базиса: новые базисные формальные векторные поля $v_1'(x), \dots, v_k'(x)$ являются строками матрицы

$$\Xi' = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & (v')_1^{k+1} & \dots & (v')_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & (v')_k^{k+1} & \dots & (v')_k^n \end{pmatrix}.$$

Ясно, что при доказательстве теоремы можно использовать векторные поля v_i' вместо v_i.

Формальные коммутаторы $[v_i', v_j']$ линейно зависят от $v_1', \dots, v_k'$ тогда и только тогда, когда формальные векторные поля $v_1', \dots, v_k'$ попарно коммутируют. Действительно, первые k компонент коммутатора $[v_i', v_j']$ всегда нулевые. Поэтому $[v_i', v_j']$ линейно выражается через $v_1', \dots, v_k'$ тогда и только тогда, когда $[v_i', v_j']$ есть тождественный нуль.

Заметим также, что "нетривиальные" (т.е. с номерами $\geq k+1$) компоненты формальных векторных полей $v_1', \dots, v_k'$ не имеют постоянных членов, так как по нашему соглашению векторы $v_1'(0), \dots, v_k'(0)$ порождают подпространство $\mathbb{K}^n$ натянутое на первые k векторов стандартного базиса.

Теперь мы, для удобства, немного изменим обозначения:

1. Переменные $x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n$ будут обозначаться через $x^1, \dots, x^k, y^1, \dots, y^{n-k}$.

2. Латинские индексы будут использоваться для переменных x, а греческие — для переменных y.

3. Нетривиальные компоненты $(v')_i^{k+1}, \dots, (v')_i^n$ формального векторного поля v_i' будут обозначаться через $u_i^1, \dots, u_i^{n-k}$ (верхние индексы будут греческими).

Тот факт, что формальные векторные поля v_i' и v_j' коммутируют записывается в координатах (с учетом новых обозначений) следующим образом:

$$(\partial_{x^j} u_i^\alpha + u_j^\gamma \partial_{y^\gamma} u_i^\alpha) - (\partial_{x^i} u_j^\alpha + u_i^\gamma \partial_{y^\gamma} u_j^\alpha) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, n-k. \tag{2}$$

Таким образом, наша цель — доказать, что интегрируемость распределения $\mathcal{D} = \operatorname{span}\{v_1', \dots, v_k'\}$ эквивалентна условию (2).

Формальный ряд F является интегралом распределения $\mathcal{D}$ тогда и только тогда, когда

$$\Xi' dF = 0.$$

Анализ этого матричного уравнения в нуле показывает, что без ограничения общности мы можем искать формальные интегралы в следующем виде:

$$F = y^\beta + G(x, y), \quad \text{где } G(0, y) = 0.$$

Ясно, что полученные таким образом $(n - k)$ формальных интегралов будут автоматически иметь независимые в нуле дифференциалы, что будет означать интегрируемость распределения. Формальное дифференциальное уравнение на G в координатах имеет следующий вид:

$$\partial_{x^i} G + u_i^\alpha \partial_{y^\alpha} G + u_i^\beta = 0, \quad i = 1, \ldots, k. \tag{3}$$

Для пространства формальных рядов, через $F^{(m)}$ мы будем обозначать стандартную проекцию ряда F на подпространство полиномов степени $\leq m$. Легко проверить, что эта стандартная проекция обладает следующими простыми свойствами:

(a) $(F^{(m+r)})^{(m)} = F^{(m)}$, для $r \geq 0$;

(b) $\partial_{x^i} F^{(m)} = (\partial_{x^i} F)^{(m-1)}$;

(c) $(u_i^\alpha F)^{(m)} = (u_i^\alpha F^{(m-1)})^{(m)}$ (так как u_i^α начинается с линейных членов);

(d) $(u_i^\alpha \partial_{x^j} F)^{(m)} = (u_i^\alpha \partial_{x^j} F^{(m)})^{(m)}$ (по той же причине).

С учетом этих свойств нетрудно показать, что система (3), после применения оператора проецирования, имеет следующий вид:

$$\partial_{x^i} G^{(m)} = -(u_i^\alpha (\partial_{y^\alpha} G^{(m-1)} + \delta_\alpha^\beta))^{(m-1)}, \tag{4}$$

Уравнение (4) показывает, что система (3) имеет очень простую структуру: если мы решаем ее последовательно (т.е. сначала для $m = 1$, потом для $m = 2$, затем 3, 4 и так далее), то на каждом следующем шаге наша система записывается так:

$$\partial_{x^i} G^{(m)} = P_i(x, y),$$

где полином $P_i(x, y)$ уже известен из предыдущего шага.

Лемма 1. *Пусть нам дана система уравнений $\partial_{x^i} f(x, y) = P_i(x, y)$, $i = 1, \ldots, k$, где $P_i(x, y)$ известные полиномы и $f(x, y)$ удовлетворяет начальному условию $f(0, y) = 0$. Тогда*

1. *Решение системы существует тогда и только тогда, когда выполнены условия совместности $\partial_{x^j} P_i(x, y) = \partial_{x^i} P_j(x, y)$;*

2. *Если решение существует, то оно единственно.*

Очевидно, что это утверждение имеет чисто алгебраическую природу и поэтому не зависит от поля $\mathbb{K}$. Для $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ лемма 1 хорошо известна, следовательно, она верна и для любого поля нулевой характеристики.

Важно отметить, что если $G^{(m)}$ решение системы (4), то начальный отрезок степени $m-1$ этого полинома является решением системы (4) на предыдущем шаге (следствие леммы 1).

Выполнение условий совместности для системы (4) эквивалентно существованию и единственности $G^{(m)}$ для каждого m, т.е. существованию и единственности G как формального ряда. Вычисляя $\partial_{x^j} P_i(x, y)$ для системы (4) и учитывая, что $G^{(m-1)}$ также удовлетворяет системе (4) (где вместо m берется $m-1$), легко видеть, что условие совместности эквивалентно тому, что выражение

$$\left((\partial_{x^j} u_i^\alpha - u_i^\gamma \partial_{y^\gamma} u_j^\alpha) \left(\partial_{y^\alpha} G^{(m-1)} + \delta_\alpha^\beta \right) - u_i^\gamma u_j^\alpha \partial_{y^\gamma} \partial_{y^\alpha} G^{(m-1)} \right)^{(m-2)}$$

симметрично по i и j. Последнее слагаемое симметрично, поэтому для выполнения условий совместности необходимо и достаточно, чтобы симметричным было выражение $\partial_{x^j} u_i^\alpha - u_i^\gamma \partial_{y^\gamma} u_j^\alpha$, что в точности означает справедливость тождества (2). Это завершает доказательство формальной теоремы Фробениуса. $\square$

3. Формальные инварианты представлений

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над полем $\mathbb{K}$ и $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ — ее любое конечномерное представление на векторном пространстве V, $\dim V = n$.

Определение 4. Формальный ряд $F \in \mathbb{K}[[x_1, \ldots, x_n]]$ называется формальным инвариантом представления ρ в точке $a \in V$, если для всех $\xi \in \mathfrak{g}$ выполнено следующее формальное тождество

$$\langle d_x F, \rho(\xi)(a + x) \rangle = 0. \tag{5}$$

Легко проверить, что если $F = f_1 + f_2 + \ldots$ формальный инвариант, то его дифференциал в нуле $df_1 \in V^*$ всегда ортогонален подпространству $V_a = \{\rho(\xi)a \mid \xi \in \mathfrak{g}\}$, т.е. для всех $\xi \in \mathfrak{g}$

$$\langle df_1, \rho(\xi)a \rangle = 0.$$

Напомним, что элемент $a \in V$ называется регулярным, если его стационарная подалгебра $\mathrm{St}(a) = \{\xi \in \mathfrak{g} \mid \rho(\xi)a = 0\}$ имеет минимальную размерность. Множество регулярных элементов открыто и всюду плотно в V. Следующее утверждение является следствием формальной теоремы Фробениуса.

Теорема 3. *Для любого представления $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ и любого регулярного элемента $a \in V$ существует набор $\{F^{(1)}, \ldots, F^{(s)}\}$ из $s = \dim V - \dim \mathfrak{g} + \dim \mathrm{St}(a)$ формальных инвариантов представления ρ в точке a, дифференциалы которых в нуле линейно независимы.*

Доказательство. Заметим, что ряд F является формальным инвариантом представления ρ тогда и только тогда, когда он является формальным интегралом распределения $\mathcal{D} = \operatorname{span}\{v_\xi(x) = \rho(\xi)(x+a) \mid \xi \in \mathfrak{g}\}$. Так как элемент a регулярен, то распределение $\mathcal{D}$ имеет постоянный ранг, равный $\dim \mathfrak{g} - \dim \operatorname{St}(a)$. Поэтому, согласно формальной теореме Фробениуса, достаточно проверить, что $[v_\xi(x), v_\eta(x)] \in \mathcal{D}$ для любых $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$. Прямое вычисление показывает, что отображение $\xi \mapsto \rho(\xi)(x+a)$ является антигомоморфизмом алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в алгебру Ли формальных векторных полей на V, т.е.

$$[v_\xi(x), v_\eta(x)] = -\rho([\xi,\eta])(a+x) = -v_{[\xi,\eta]}(x) \in \mathcal{D}.$$

Теорема доказана. $\square$

Замечание 1. Доказательство формальной теоремы Фробениуса позволяет последовательно находить однородные части формальных инвариантов представлений любого конечного порядка путем решения системы линейных уравнений.

4. Определение и коммутативность $\mathcal{F}_a$

Лиевская структура на $\mathfrak{g}$ индуцирует на симметрической алгебре $S(\mathfrak{g}) \simeq \mathbb{K}[\mathfrak{g}^*]$ скобку Пуассона-Ли, которая определяется следующим образом:

$$\{f,g\} = c_{ij}^k x_k \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_j}, \quad f,g \in S(\mathfrak{g}).$$

Структура Пуассона-Ли превращает симметрическую алгебру $S(\mathfrak{g})$ в пуассонову алгебру $P(\mathfrak{g}) = (S(\mathfrak{g}), \{\cdot,\cdot\})$, ассоциированную с $\mathfrak{g}$.

Рассмотрим коприсоединенное представление $\operatorname{ad}^* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}^*)$. Пусть $a \in \mathfrak{g}^*$ — регулярный элемент, т.е. его аннулятор $\operatorname{Ann}(a) = \{\xi \in \mathfrak{g} \mid \operatorname{ad}^*_\xi a = 0\}$ имеет минимальную размерность $s = \operatorname{ind}\mathfrak{g}$. Тогда, по теореме 3 о формальных инвариантах, существует s формальных рядов $F^{(1)}, \ldots, F^{(s)} \in \mathbb{K}[[\mathfrak{g}^*]]$ таких, что для всех $\xi \in \mathfrak{g}$

$$\langle d_x F^{(j)}, \operatorname{ad}^*_\xi(a+x)\rangle = 0. \tag{6}$$

Кроме того, дифференциалы $dF^{(1)}, \ldots, dF^{(s)}$ линейно независимы в нуле и образуют базис в $\operatorname{Ann}(a)$. Пусть $F^{(j)} = f_1^{(j)} + f_2^{(j)} + \ldots$, где $f_i^{(j)} \in \mathbb{K}[\mathfrak{g}^*]$ есть однородный полином степени i. Тогда (6) можно эквивалентным образом переписать на языке полиномов:

$$\operatorname{span}\{df_1^{(1)}, \ldots df_1^{(s)}\} = \operatorname{Ann}(a), \tag{7}$$

$$\operatorname{ad}^*_{df_{i+1}^{(j)}} a + \operatorname{ad}^*_{df_i^{(j)}} x = 0, \tag{8}$$

для $i = 1, 2, \ldots$ и $j = 1, \ldots, s$. Пусть $\mathcal{F}_a$ обозначает подмножество в пуассоновой алгебре $P(\mathfrak{g})$, состоящее из всех этих полиномов,

$$\mathcal{F}_a = \{f_i^{(j)} \mid j = 1, \ldots, s,\ i = 1, 2, \ldots\} \subset P(\mathfrak{g}). \tag{9}$$

Замечание 2. Если $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, то ряд F, удовлетворяющий тождеству (6), является рядом Тейлора в нуле функции $f_a(x) = f(a + x)$, где $f(x) \in \mathcal{I}(\mathfrak{g})$ — локально аналитический инвариант каприсоединенного представления. В этом случае набор полиномов $\mathcal{F}_a$ с точки зрения функциональной зависимости эквивалентен семейству сдвигов инвариантов $\{f(x + \lambda a) \mid f \in \mathcal{I}(\mathfrak{g}), \lambda \in \mathbb{K}\}$, см. [5]. Поэтому мы будем говорить, что набор $\mathcal{F}_a \subset P(\mathfrak{g})$ получен формальным методом сдвига аргумента.

Следующее утверждение является переформулировкой теоремы о коммутативности сдвигов инвариантов коприсоединенного представления, доказанной А.С. Мищенко и А.Т. Фоменко в [5].

Теорема 4. *Набор $\mathcal{F}_a$ коммутативен.*

Доказательство. Коммутативность набора $\mathcal{F}_a$ следует из общей и очень важной конструкции, называемой схемой Ленара [10]. Пусть $\{\cdot,\cdot\}_1$ и $\{\cdot,\cdot\}_2$ две согласованные скобки Пуассона, т.е. каждая линейная комбинация $\alpha\{\cdot,\cdot\}_1 + \beta\{\cdot,\cdot\}_2$ снова является скобкой Пуассона. Последовательность функций $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ называется бигамильтоновой иерархией, если

$$\{f_i,\cdot\}_1 = -\{f_{i+1},\cdot\}_2.$$

На $S(\mathfrak{g})$ вместе со стандартной скобкой Ли-Пуассона $\{\cdot,\cdot\}$ мы можем рассмотреть скобку $\{\cdot,\cdot\}_a$, полученную "замораживанием аргумента":

$$\{f,g\}_a = c_{ij}^k a_k \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_j}, \quad f,g \in S(\mathfrak{g}).$$

Прямое вычисление показывает, что скобки $\{\cdot,\cdot\}$ и $\{\cdot,\cdot\}_a$ согласованы. Соотношение (8), в сущности, означает, что полиномы $\{f_i^{(j)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ формируют бигамильтонову иерархию для всех $j = 1,\dots,s$, причем $f_1^{(1)},\dots,f_1^{(s)}$ являются функциями Казимира скобки $\{\cdot,\cdot\}_a$:

$$\{f_1^{(j)},\cdot\}_a = 0,$$

$$\{f_{i+1}^{(j)},\cdot\}_a + \{f_i^{(j)},\cdot\} = 0.$$

Таким образом, набор $\mathcal{F}_a$ состоит из s различных бигамильтоновых иерархий. Пусть $f_i^{(\alpha)}, f_j^{(\beta)} \in \mathcal{F}_a$, тогда

$$\{f_i^{(\alpha)}, f_j^{(\beta)}\} = -\{f_{i+1}^{(\alpha)}, f_j^{(\beta)}\}_a = \{f_{i+1}^{(\alpha)}, f_{j-1}^{(\beta)}\} = -\{f_{i+2}^{(\alpha)}, f_{j-1}^{(\beta)}\}_a = \ldots = -\{f_{i+j}^{(\alpha)}, f_1^{(\beta)}\}_a = 0,$$

что и требовалось. □

Замечание 3. Из доказательства формальной теоремы Фробениуса следует, что набор полиномов $\mathcal{F}_a$ можно строить следующим "каноническим" способом. Возьмем любой линейный полином $f_1 \in \mathrm{Ann}(a)$. Тогда решение системы (набор полиномов $f_2, f_3, \ldots \in P(\mathfrak{g})$, $\deg f_i = i$)

$$\mathrm{ad}^*_{df_{i+1}} a + \mathrm{ad}^*_{df_i} x = 0,$$

с начальным условием

$$\pi \circ f_i \equiv 0, \quad i \geq 2,$$

где $\pi : \mathrm{Ann}^*(a) \to \mathfrak{g}^*$ стандартная проекция, существует и единственно. Таким образом можно построить $\dim \mathrm{Ann}(a)$ различных иерархий, составляющих $\mathcal{F}_a$.

Для доказательства критерия полноты набора $\mathcal{F}_a$ нам потребуются лемма из линейной алгебры.

5. Лемма о паре кососимметрических форм

Пусть V — конечномерное пространство над полем $\mathbb{K}$ нулевой характеристики, $\dim V = n$, а $\mathcal{S}$ — двумерное линейное семейство кососимметрических билинейных форм на V, порожденное двумя фиксированными формами A_1 и A_2, $\mathcal{S} = \mathrm{span}\,\{A_1, A_2\}$. Выделим в семействе $\mathcal{S}$ подмножество $\mathcal{S}_0$ форм общего положения, т.е. форм максимального ранга $R_0 = \max\limits_{A \in \mathcal{S}} \mathrm{rank}\, A$. Обозначим через L_0 подпространство в V, порожденное ядрами форм общего положения:

$$L_0 = \mathrm{span}\,\{\mathrm{Ker}\; A,\; A \in \mathcal{S}_0\}.$$

Предположим, что A_1 является формой общего положения, т.е. $A_1 \in \mathcal{S}_0$, и векторы $e_1^0, \ldots, e_r^0$ образуют базис в $\mathrm{Ker}\; A_1$. Пусть векторы e_i^j удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$A_1(e_i^0) = 0, \quad A_1(e_i^1) = A_2(e_i^0), \quad A_1(e_i^2) = A_2(e_i^1), \quad A_1(e_i^3) = A_2(e_i^2), \quad \ldots \tag{10}$$

Последовательность векторов $\{e_i^0, e_i^1, \ldots\}$, определенная этой процедурой, называется иерархией, порожденной парой форм A_1 и A_2.

Лемма 2. *Пусть B — произвольная нетривиальная форма из семейства $\mathcal{S}$, и $\bar{\mathbb{K}}$ — алгебраическое замыкание поля $\mathbb{K}$. Тогда*

1. *Подпространство L_0 изотропно относительно B. Более того, L_0 является максимальным изотропным тогда и только тогда, когда любая нетривиальная линейная комбинация $\lambda_0 A_0 + \lambda_1 A_1$ с коэффициентами из $\bar{\mathbb{K}}$ имеет максимальный ранг R_0.*

2. *$L_0 = \mathrm{span}\,\{e_i^j;\; i = 1, \ldots, r,\; j = 0, 1, 2, \ldots\}$.*

Доказательство первого утверждения леммы 2 для $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, которое без труда переносится на случай произвольного алгебраически замкнутого поля, можно найти в работе [2]. Лемма 2 легко вытекает из следующей теоремы о приведении пары кососимметрических форм к каноническому виду.

Пусть I_k обозначает единичную матрицу размера k, а $J_{k,\mu}$ — жорданову клетку размера k и собственным значением μ, где $k \in \mathbb{N}$, $\mu \in \mathbb{K}$.

Теорема 5. *Любая пара (A_1, A_2) кососимметрических билинейных форм на конечномерном пространстве над алгебраически замкнутым полем может быть разложена в прямую сумму пар форм, каждая из которых изоморфна одной из следующих пар:*

1. $\mathcal{H}_{2k,\mu} = (H_1^{(k,\mu)}, H_2^{(k,\mu)})$, *где*

$$H_1^{(k,\mu)} = \begin{pmatrix} 0 & I_k \\ -I_k & 0 \end{pmatrix}, \quad H_2^{(k,\mu)} = \begin{pmatrix} 0 & J_{k,\mu} \\ -J_{k,\mu}^t & 0 \end{pmatrix}.$$

2. $\mathcal{H}_{2k,\infty} = (H_1^{(k,\infty)}, H_2^{(k,\infty)})$, *где*

$$H_1^{(k,\infty)} = \begin{pmatrix} 0 & J_{k,0} \\ -J_{k,0}^t & 0 \end{pmatrix}, \quad H_2^{(k,\infty)} = \begin{pmatrix} 0 & I_k \\ -I_k & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Пара Кронекера $\mathcal{K}_{2k-1} = (K_1^{(2k-1)}, K_2^{(2k-1)})$. *Эта пара форм определена на* $(2k-1)$*-мерном пространстве, в базисе* $(v_0, \dots, v_{2k-2})$ *ненулевыми является только следующие спаривания:*

$$A_1(v_{2l}, v_{2l+1}) = 1, \quad A_2(v_{2l+1}, v_{2l+2}) = 1, \quad l = 0, \dots, k-2.$$

Этот замечательный алгебраический факт играет важную роль в теории бигамильтоновых систем (см. [9]). Его доказательство можно найти в работе И.М. Гельфанда и И.С. Захаревича [4], см. также [11]. В контексте этой теоремы условие максимальной изотропности эквивалентно тому, что в каноническом виде присутствуют только кронекеровские пары.

6. Критерий полноты $\mathcal{F}_a$

Пусть $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, \dots\} \subset P(\mathfrak{g})$ — коммутативный набор полиномов. Хорошо известно, что число алгебраически независимых полиномов в $\mathcal{F}$ не может превосходить $\frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \operatorname{ind} \mathfrak{g})$. Действительно, коммутативность набора $\mathcal{F}$ означает, что подпространство $d_x\mathcal{F} = \operatorname{span}\{df(x),\ f \in \mathcal{F}\} \subset \mathfrak{g}$, порожденное дифференциалами функций из $\mathcal{F}$ в точке x, изотропно относительно формы $A_x : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{K}$, $A_x(\cdot,\cdot) = \langle x, [\cdot,\cdot]\rangle$, а $\frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \operatorname{ind} \mathfrak{g})$ — это в точности размерность максимального изотропного подпространства в точке $x \in \mathfrak{g}^*$ общего положения.

Определение 5. Коммутативный набор $\mathcal{F}$ называется полным, если он содержит $\frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \operatorname{ind} \mathfrak{g})$ алгебраически независимых полиномов.

Рассмотрим алгебру Ли $\mathfrak{g}^{\bar{\mathbb{K}}} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{K}} \bar{\mathbb{K}}$, полученную из $\mathfrak{g}$ расширением основного поля $\mathbb{K}$ до его алгебраического замыкания $\bar{\mathbb{K}}$, и множество сингулярных элементов в коалгебре $(\mathfrak{g}^{\bar{\mathbb{K}}})^*$:

$$(\mathfrak{g}^{\bar{\mathbb{K}}})^*_{sing} = \{x \in (\mathfrak{g}^{\bar{\mathbb{K}}})^* \mid \dim \operatorname{Ann}(x) > \operatorname{ind} \mathfrak{g}\}.$$

Теорема 6. *Пусть* $\mathfrak{g}$ *— конечномерная алгебра Ли над полем* $\mathbb{K}$ *характеристики нуль и* $a \in \mathfrak{g}^*$ *— регулярный элемент. Коммутативный набор* $\mathcal{F}_a$*, построенный формальным методом сдвига аргумента, является полным тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{codim}(\mathfrak{g}^{\bar{\mathbb{K}}})^*_{sing} \geq 2.$$

Доказательство. Полнота коммутативного набора $\mathcal{F}_a$ означает, что подпространство $d_x\mathcal{F}_a$ максимально изотропно относительно формы A_x для точек $x \in \mathfrak{g}^*$ общего положения (т.е. на открытом по Зарисскому множестве).

По построению комутативный набор $\mathcal{F}_a$ состоит из полиномов $f_i^{(j)}$, $j = 1, \dots, \operatorname{ind}\mathfrak{g}$, $i = 1, 2, \dots$, дифференциалы которых удовлетворяют соотношениям (7), (8). Эта система соотношений (бигамильтонова иерархия) в точности означает, что последовательность $\{df_i^{(j)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ в каждой фиксированной точке $x \in \mathfrak{g}^*$ является иерархией вида (10), порожденной парой форм A_a и A_x, причем векторы $df_1^{(j)}$, $j = 1, \dots, s = \operatorname{ind}\mathfrak{g}$ образуют базис в $\ker A_a = \operatorname{Ann}(a)$.

Таким образом, к подпространству $d_x\mathcal{F}_a$ мы можем применить Лемму 2, которая дает критерий его максимальной изотропности. Согласно этой лемме, $d_x\mathcal{F}_a$ максимально изотропно тогда и только тогда, когда все нетривиальные линейные комбинации вида $\lambda A_a + \mu A_x = A_{\lambda a+\mu x}$ с коэффициентами $\lambda, \mu \in \bar{\mathbb{K}}$ имеют максимальный ранг $R_0 = \dim\mathfrak{g} - \operatorname{ind}\mathfrak{g}$. В терминах алгебры Ли $\mathfrak{g}^{\bar{\mathbb{K}}}$ это условие эквивалентно тому, что все элементы вида $\lambda a + \mu x$ (за исключением тривиальной комбинации) являются регулярными. Геометрически это означает, что двумерная плоскость, порожденная ковекторами x и a в $(\mathfrak{g}^{\bar{\mathbb{K}}})^*$, пересекает множество сингулярных точек $(\mathfrak{g}^{\bar{\mathbb{K}}})^*_{sing}$ лишь в нуле.

Полнота набора $\mathcal{F}_a$ означает выполнение этого геометрического условия для почти всех $x \in \mathfrak{g}^*$. Совершенно ясно, что это происходит тогда и только тогда, когда $\operatorname{codim}(\mathfrak{g}^{\bar{\mathbb{K}}})^*_{sing} \geq 2$. Теорема доказана. $\square$

Замечание 4. Условие полноты $\operatorname{codim}(\mathfrak{g}^{\bar{\mathbb{K}}})^*_{sing} \geq 2$ допускает естественную интерпретацию без использования алгебраического замыкания основного поля. Дело в том, что множества сингулярных элементов в $\mathfrak{g}^*$ и в $(\mathfrak{g}^{\bar{\mathbb{K}}})^*$ задаются одной и той же системой полиномиальных уравнений. Соответствующими полиномами являются миноры порядка $\dim\mathfrak{g} - \operatorname{ind}\mathfrak{g}$ матрицы кососимметрической формы A_x, элементы которой имеют вид $(A_x)_{ij} = c_{ij}^k x_k$. Ясно, что эти миноры являются многочленами степени $\dim\mathfrak{g} - \operatorname{ind}\mathfrak{g}$ от $x_1, \dots, x_n$ с коэффициентами из $\mathbb{K}$, а условие полноты в точности означает, что наибольший общий делитель этих многочленов тривиален. Очевидно, что наибольший общий делитель многочленов не меняется при расширении поля. Отметим также, что нахождение наибольшего общего делителя может быть осуществлено при помощи алгоритма Евклида.

Список литературы

[1] Болсинов А.В. *Критерий полноты семейства функций в инволюции, построенного методом сдвига аргумента.* ДАН СССР, 1988, т.301, № 5. с.1037-1040.

[2] Болсинов А.В. *Согласованные скобки Пуассона на алгебрах Ли и полнота семейств функций в инволюции.* Известия АН. СССР, Сер. матем., 1991, 55, № 1, 68-92.

[3] Болсинов А.В. *Полные инволютивные наборы полиномов в пуассоновых алгебрах: доказательство гипотезы Мищенко-Фоменко.* Труды семинара по вект. и тенз. анализу, Вып. 26, М.:МГУ, 2005, 87-109.

[4] Гельфанд И.М., Захаревич И.С. *Спектральная теория пучка кососимметрических дифференциальных операторов 3-го порядка на S^1.* Функц. анализ и его прил., 1989, 23:2, 1–11.

[5] Мищенко А.С., Фоменко А.Т. *Уравнения Эйлера на конечномерных группах* Изв. АН СССР. Сер. Матем., 42, № 2 (1978), 396-415.

[6] Мищенко А. С., Фоменко А. Т. *Интегрирование гамильтоновых систем с некоммутативными симметриями*, Труды семинара по вект. и тенз. анализу, вып.20, М.:МГУ, 1981, 5-54.

[7] Садэтов С.Т. *Доказательство гипотезы Мищенко-Фоменко.* Доклады РАН, 2004, 397 № 6, 751-754.

[8] Стернберг С., *Лекции по дифференциальной геометрии.* М.: Мир, 1970.

[9] I.M. Gelfand, I. Zakharevich *Webs, Lenard schemes, and the local geometry of bihamiltonian Toda and Lax structures*, arXiv:math.DG/9903080 v3 27 Mar 2000.

[10] J. Praught, R.G. Smirnov, *Andrew Lenard: A Mystery Unraveled*, Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications, Vol. 1 (2005).

[11] Thompson R.C. *Pencils of Complex and Real Symmetric and Skew Matrices* Linear algebra and its applications 147:323-371(1991).